



저작자표시-비영리-변경금지 2.0 대한민국

이용자는 아래의 조건을 따르는 경우에 한하여 자유롭게

- 이 저작물을 복제, 배포, 전송, 전시, 공연 및 방송할 수 있습니다.

다음과 같은 조건을 따라야 합니다:



저작자표시. 귀하는 원저작자를 표시하여야 합니다.



비영리. 귀하는 이 저작물을 영리 목적으로 이용할 수 없습니다.



변경금지. 귀하는 이 저작물을 개작, 변형 또는 가공할 수 없습니다.

- 귀하는, 이 저작물의 재이용이나 배포의 경우, 이 저작물에 적용된 이용허락조건을 명확하게 나타내어야 합니다.
- 저작권자로부터 별도의 허가를 받으면 이러한 조건들은 적용되지 않습니다.

저작권법에 따른 이용자의 권리는 위의 내용에 의하여 영향을 받지 않습니다.

이것은 [이용허락규약\(Legal Code\)](#)을 이해하기 쉽게 요약한 것입니다.

[Disclaimer](#)

공학석사 학위논문

수평 선배열을 이용한  
배열 불변성 기반의 수동형 음원 거리 추정

Passive ranging based on array invariant  
using a horizontal nested array



지도교수 김재수

1945

2018년 8월

한국해양대학교 대학원

해양공학과

구 홍 주

본 논문을 구홍주의 공학석사 학위논문으로 인준함.

위원장      공학박사      김 기 만      (인)

위    원      공학박사      변 성 훈      (인)

위    원      공학박사      김 재 수      (인)



2018년 6월 22일

한국해양대학교 대학원

# 목 차

List of Tables .....	iii
List of Figures .....	iv
Abstract .....	v
1. 서 론 .....	1
1.1 연구의 목적 .....	1
1.2 연구 동향 및 논문 구성 .....	2
2. 배열 불변성 기반의 거리 추정 이론 .....	4
2.1 도파관 불변성 .....	4
2.2 배열 불변성 .....	9
3. 배열 불변성 기반의 거리 추정: 모의실험 및 해상실험 결과 .....	13
3.1 해상실험 내용 및 장비의 구성 .....	13
3.2 모의실험 결과 분석 .....	16
3.3 해상실험 결과 분석 .....	21
4. 배열 불변성 기반의 거리 추정: 성능 분석 및 예측 .....	24
4.1 모의실험 환경 .....	24
4.2 음원의 방위각에 따른 거리 추정 성능 .....	27
4.3 송신 신호의 길이에 따른 거리 추정 성능 .....	30
4.4 수신기의 설계 주파수와 길이에 따른 거리 추정 성능 .....	34

5. 결론 .....	37
5.1 결론 .....	37
5.2 향후 과제 .....	39
참고문헌 .....	41
Appendix .....	43



## List of Tables

Table 3.1 수신 배열의 주파수 대역 .....	15
Table 3.2 모의실험 거리 추정 결과 .....	20
Table 3.3 해상실험 거리 추정 결과 .....	23
Table 4.1 수신 배열의 주파수 대역 .....	26
Table 4.2 음원의 방위각에 따른 거리 추정 결과 .....	29
Table 4.3 송신 신호의 길이에 따른 거리 추정 결과 .....	32
Table 4.4 수신기의 설계 주파수와 길이에 따른 거리 추정 결과 .....	36



## List of figures

Fig. 1.1 수동형 수평 소나 운용 개념도 .....	1
Fig. 2.1 전달 손실, (a) 주파수 21.5Hz~26Hz에 대해 0.5Hz 마다 2dB 간격을 준 전달 손실, (b) 주파수-거리 평면 전달손실 .....	4
Fig. 2.2 고각의 정의 .....	7
Fig. 2.3 고각과 방위각의 정의 .....	9
Fig. 2.4 주파수 대역에 따른 빔-시간 영역 세기 패턴, (a) 주파수 대역 30-40Hz, (b) 주파수 대역 40-50Hz, (c) 주파수 대역 30-50Hz .....	11
Fig. 3.1 실험 구성 측면도 .....	13
Fig. 3.2 실험 구성 평면도, (a) Case 1, (b) Case 2 .....	14
Fig. 3.3 음속 분포, (a) Case 1, (b) Case 2 .....	14
Fig. 3.4 주파수 대역에 따른 수신 배열 간격 .....	15
Fig. 3.5 송신 신호, (a) 시간 영역의 송신 신호, (b) 주파수 영역의 송신 신호	16
Fig. 3.6 모의실험 수신 신호, (a) Case 1, (b) Case 2 .....	17
Fig. 3.7 빔-시간 영역 세기 패턴, (a) Case 1, (b) Case 2 .....	18
Fig. 3.8 해상실험 수신 신호, (a) case 1, (b) case 2 .....	21
Fig. 3.9 해상실험 수신 신호 스펙트럼, (a) case 1, (b) case 2 .....	21
Fig. 3.10 빔-시간 영역 세기 패턴, (a) case 1, (b) case 2 .....	22
Fig. 4.1 모의실험 구성 측면도 .....	24
Fig. 4.2 모의실험 구성 평면도 .....	25
Fig. 4.3 송신 신호, (a) 시간 영역의 송신 신호, (b) 주파수 영역의 송신 신호	25
Fig. 4.4 주파수 대역에 따른 수신 배열 간격 .....	26

Fig. 4.5	모의실험 구성 평면도, (a) 음원이 브로드사이드 방향( $0^\circ$ )에 위치할 경우, (b) 음원이 앤드 파이어 방향( $90^\circ$ )에 위치할 경우	27
Fig. 4.6	수신 신호, (a) 음원이 브로드사이드 방향( $0^\circ$ )에 위치할 경우, (b) 음원에서 앤드 파이어 방향( $90^\circ$ )에 위치할 경우	28
Fig. 4.7	빔-시간 영역 세기 패턴, (a) 음원이 브로드사이드 방향( $0^\circ$ )에 위치할 경우, (b) 음원에서 앤드 파이어 방향( $90^\circ$ )에 위치할 경우	28
Fig. 4.8	음원의 방위각에 따른 거리 추정 오차율	29
Fig. 4.9	송신 신호, (a) 송신 신호의 길이가 0.01초인 경우, (b) 송신 신호의 길이가 0.2초인 경우	30
Fig. 4.10	수신 신호, (a) 송신 신호의 길이가 0.01초인 경우, (b) 송신 신호의 길이가 0.2초인 경우	31
Fig. 4.11	빔-시간 영역 세기 패턴, (a) 송신 신호의 길이가 0.01초인 경우, (b) 송신 신호의 길이가 0.2초인 경우	31
Fig. 4.12	송신 신호의 길이에 따른 거리 추정 오차율	32
Fig. 4.13	채널응답특성	33
Fig. 4.14	수신 신호, (a) Band 1, (b) Band 2, (c) Band 3, (d) Band 4	34
Fig. 4.15	빔-시간 영역 세기 패턴, (a) Band 1, (b) Band 2, (c) Band 3, (d) Band 4	35
Fig. 5.1	배열의 Y자형 배치	39
Fig. 5.2	음원의 깊이에 따른 모의실험 환경 측면도	39
Fig. 5.3	음원의 깊이에 따른 빔-시간 영역 세기 패턴, (a) 1m, (b) 20m, (c) 40m, (d) 60m, (e) 80m, (f) 100m	40



# 수평 선배열을 이용한 배열 불변성 기반의 수동형 음원 거리 추정

구 홍 주

한국해양대학교  
해양공학과

## 초 록

소나 체계에서 은밀성을 유지한 채 표적의 거리를 추정하는 것은 중요한 문제이다. 본 논문에서는 배열 불변성 기법을 통해 수평 선배열에서 음원의 거리를 추정하였다. 이 기법은 환경 정보가 불필요하며 연산량이 적어 실시간 거리 추정이 가능하다는 장점을 가지고 있다. 알고리즘을 검증하기 위해 해상실험 데이터에 기법을 적용하고 모의실험 결과와 비교하였다. 그리고 음원의 방위각, 송신 신호의 길이, 수신기의 설계주파수와 길이에 따른 거리 추정 성능을 모의실험을 통해 보이고 이를 분석하였다.

핵심용어: 배열 불변성, 거리 추정, 수평 선 배열

# Passive ranging based on array invariant using a horizontal nested array

Hong Ju Gu

Department of Ocean Engineering  
Graduate School of Korea Maritime and Ocean University

## Abstract

In sonar systems, it is essential to secretly estimate the distance of a target. This thesis estimated the distance of a source in a horizontal nested array using an array invariant method. The advantages of this method are that environmental information is unnecessary and the real-time distance estimation is possible, as the computation amount is small. This method is applied to experimental data and it is compared with the results of simulation experiments to verify the algorithm. This paper also presented and analyzed the performance of the estimated distance according to the source orientation, transmission signal length, and design frequency and length of a receiver through simulation experiments.

KEY WORDS: Array invariant, Range estimation, Horizontal nested array

# 1. 서론

## 1.1 연구의 목적

수중에서의 탐지 수단 가운데 널리 적용되는 소나(SOUND NAVIGATION and Ranging, SONAR)를 이용하여 목표물의 거리를 추정하는 것은 매우 중요한 문제이다[1]. 거리는 표적의 위치를 파악하는 것뿐만 아니라 방사 소음 분석 시 반드시 필요한 정보로 활용된다. 본 논문에서는 목표물이 방사하는 소리를 수평 배열로 수신하고 수신된 신호만을 이용해 거리를 추정하는 알고리즘에 대해 연구한다.

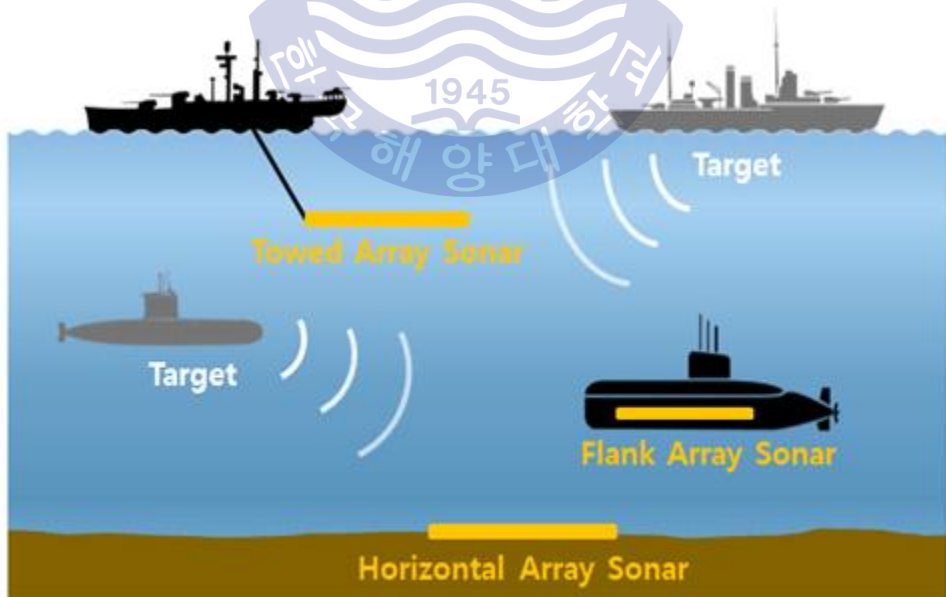


Fig. 1.1 수동형 수평 소나 운용 개념도

## 1.2 연구 동향 및 논문 구성

두 차례에 걸친 세계대전을 통해 잠수함을 탐지하기 위한 음원 거리 추정 기술이 매우 발전하였다. 소나가 쓰이는 해양은 공기 중에 비해 시공간적으로 변동이 심하고 매우 불안정하므로 음원의 거리 추정이 매우 까다롭다. 따라서 해양 환경 변수의 영향을 감소시켜 성능을 향상시키기 위해 현재까지 다양한 연구들이 수행되고 있다.

기존의 수동형 거리 추정 기법을 고찰해보면 기본적으로 음파도달시간차(Time Difference Of Arrival, TDOA)를 이용하는 기법이 있다. 이 기법은 가장 빨리 도달하는 신호를 직접파라고 판단하기 때문에 다중경로(Multipath) 영향이 심각한 문제가 된다[3]. 또한 깊이에 따른 음속 변화를 고려하지 않기 때문에 해양환경에 취약하다는 단점이 있다.

가장 널리 알려져 연구되고 있는 정합장 처리 기법(Matched Field Processing, MFP)은 해양음장을 모사하고 이것을 배열에서 측정된 신호와 정합하여 음원의 위치를 추정하는 기법이다. 이 때 해양 환경을 정확하게 모사하는 것에 어려움이 있어 이에 따른 오정합(Mismatch) 문제가 초래되며 다른 방식에 비해 연산량이 많다[4-5].

또 다른 기법으로 거리와 주파수의 함수에서 모드 간 간섭에 의한 세기의 기울기는 음원의 거리에 비례하여 나타난다는 도파관 불변성(Waveguide invariant)이론을 통해 거리를 추정할 수 있다[6-7]. 이 방법은 환경 정보가 불필요하다는 이점이 있지만 많은 수의 도파관 불변 파라메타를 필요로 한다는 한계점이 있다.

본 논문에서는 배열 불변성(Array invariant) 기법을 이용하여 다중경로 환경에서 광대역 음원의 거리를 추정한다. 배열 불변성은 모드 간 간섭의 영향을 받지 않으므로 여러 모드에 대한 정보가 불필요하다. 또한 환경 정보 없이 수신 신호와 수신 배열의 정보만으로 거리 추정이 가능하며 연산량이 적어 실시간 거리 추정이 가능하다는 장점을 가지고 있다[8-14].

본 논문은 배열 불변성 기반의 거리 추정 및 성능 분석에 목적을 두며 5개의 장으로 구성되어 있다. 1장에서는 논문의 목적에 대해 설명하고 음원의 거리 추정에 대한 최근 연구 동향을 정리한다. 2장에서는 도파관 불변성에 대한 이해와 함께 배열 불변성 기반의 거리 추정 과정을 설명한다. 3장에서는 배열 불변성 기반의 거리 추정 알고리즘을 검증하기 위해 모의실험과 해상실험을 통해 거리 추정을 수행한다. 먼저 해상실험의 내용과 장비의 구성에 대해 설명한다. 해상실험 환경에 맞추어 모의실험을 수행하고 이를 해상실험 데이터에 적용한 결과와 비교하였다. 4장에서는 여러 가지 요소에 따른 거리 추정 성능을 분석한다. 음원의 방위각과 송신 신호의 길이, 수신기의 설계 주파수와 길이에 대해 모의실험을 수행하고 결과를 통해 성능을 예측한다. 5장에서는 본 논문에 대한 요약과 결론에 대해 논하고 음원의 거리 추정에 대한 연구 방향을 제시한다.



## 2. 배열 불변성 기반의 거리 추정 이론

### 2.1 도파관 불변성

배열 불변성을 이해하기에 앞서 정규 모드 이론(Normal mode theory) 기반의 도파관 불변성에 대해 설명한다. 도파관 불변성(Waveguide invariant)은 거리와 주파수의 함수에서 모드에 대한 세기의 기울기는 음원의 거리에 비례하여 나타난다는 이론이다. 도파관 환경에서 음파가 전달될 때 모드간의 간섭에 의해 전달 손실(Transmission loss) 패턴은 골과 마루를 갖는다. 이것을 간섭 패턴(Interference pattern)이라 하며 같은 전파 환경에서 주파수가 미소하게 변할 때 간섭 패턴의 골과 마루의 위치가 약간 이동하게 된다. 그림 2.1은 Pekeris 음속 구조를 가지는 깊이 100m의 도파관에서 수심 36m에 위치한 음원에서 중심 주파수 20Hz의 신호가 발생될 때 수심 36m에서의 전달손실을 KRAKEN 프로그램을 수행하여 얻은 결과이다. 주파수가 증가할수록 골과 마루 사이의 거리가 늘어나는 것을 확인할 수 있다.

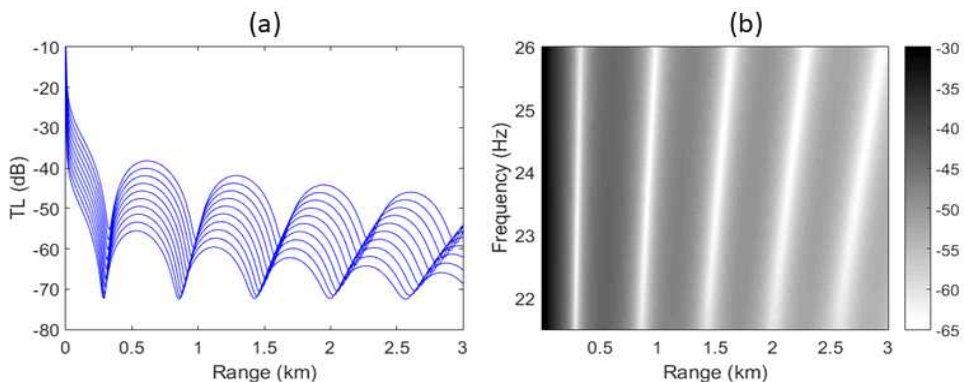


Fig. 2.1 전달 손실, (a) 주파수 21.5Hz~26Hz에 대해 0.5Hz 마다 2dB 간격을 준 전달 손실, (b) 주파수-거리 평면 전달손실

간섭패턴의 변화는 거리와 주파수의 함수이며 도파관 전파의 특성을 의미한다. 간섭패턴의 기울기는 스칼라 매개변수로 나타내어지는데 이것을 도파관 불변 인자라 하고  $\beta$ 로 표기한다[6].

도파관 불변 인자의 유도과정을 간단히 살펴보면, 정규 모드에서 세기(Intensity)  $I(r, z, \omega)$ 가 일정하다는 식 2.1에서부터 시작되며 거리와 주파수에 대해 식 2.2, 식 2.3을 얻을 수 있다.

$$I(r, z, \omega) = const \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial I}{\partial r} \delta r + \frac{\partial I}{\partial \omega} \delta \omega = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{\delta \omega}{\delta r} = - \frac{\partial I}{\partial r} / \frac{\partial I}{\partial \omega} \quad (2.3)$$

세기  $I(r, z, \omega)$ 는 평균 자승 압력과 비례하며 식 2.4와 같다.

$$I(r, z; \omega) \propto \sum_n B_n^2 + 2 \sum_{m \neq n} B_m B_n \cos[\Delta k_{mn}(\omega)r] \quad (2.4)$$

$$\Delta k_{mn} \equiv k_{rm} - k_{rn}$$

위 식에서  $\Delta k_{mn}$ 는 모드 쌍의 수평방향 파수(Wavenumber) 차이이고  $B_{m,n}$ 은 모드의 진폭이다. 세기를 거리와 주파수에 대해 각각 미분하고 위상속도(Phase velocity)  $v_p$ 와 군속도(Group velocity)  $v_g$ 에 대해 나타내면 식 2.5, 식 2.6과 같다. 이때  $v_{pm} = \omega/k_{rm}$ ,  $v_{pn} = \omega/k_{rn}$ 이고

$v_{gm} = \partial\omega/\partial k_{rm}$ ,  $v_{gn} = \partial\omega/\partial k_{rn}$ 이다.

$$\frac{\partial I}{\partial r} = -\omega \sum_m \sum_n B_n B_m \left( \frac{1}{v_{pm}} - \frac{1}{v_{pn}} \right) \sin[\Delta k_{mn} r] \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial I}{\partial \omega} = -r \sum_m \sum_n B_n B_m \left( \frac{1}{v_{gm}} - \frac{1}{v_{gn}} \right) \sin[\Delta k_{mn} r] \quad (2.6)$$

위 두 식을 식 2.3에 대입하면 식 2.7과 같다.

$$\frac{\delta r}{\delta \omega} = -\frac{r}{\omega} \frac{dS_g}{dS_p} \quad (2.7)$$

위 식에서  $S_p$ 는 위상 슬로우니스(Phase slowness)로 위상속도  $v_p$ 의 역수이고  $S_g$ 는 군 슬로우니스(Group slowness)로 군속도  $v_g$ 의 역수이다. 도파관 불변 인자  $\beta$ 를 식 2.8과 같이 정의하면 식 2.9를 얻는다.

$$\frac{1}{\beta} \equiv -\frac{dS_g}{dS_p} = -\left(\frac{v_p}{v_g}\right)^2 \frac{dv_g}{dv_p} \quad (2.8)$$

$$\frac{\delta \omega}{\delta r} = \beta \frac{\omega}{r} \quad (2.9)$$

따라서 도파관 불변 인자  $\beta$ 는 스칼라 매개변수로 나타내어지며 거리와 주파수, 모드 차수, 음속 구조에 대해 독립적이라는 것을 알 수 있다.



좌표계에서 고각(Elevation angle)  $\phi$ 이 그림 2.2와 같고  $c$ 는 음파의 전달 속도일 때 이상적인 도파관에서 수평방향 파수(Wave number)  $k_r$ 은 식 2.10과 같고 위상속도와 군속도는 식 2.11, 식 2.12와 같이 나타내어진다.

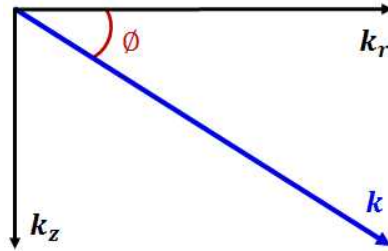


Fig. 2.2 고각( $\phi$ )의 정의

$$k_r = k \cos \phi = (\omega/c) \cos \phi \quad (2.10)$$

$$v_p = \frac{\omega}{k_r} = \frac{\omega}{\frac{\omega}{c} \cos \phi} = \frac{c}{\cos \phi} \quad (2.11)$$

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k_r} = \frac{2\pi \partial f}{\partial \sqrt{k^2 - k_z^2}} = \frac{2\pi \partial f}{\partial k} \frac{k}{k_r} = \frac{2\pi \partial f}{\partial k} \cos \phi = c \cos \phi \quad (2.12)$$

따라서 이상적인 도파관 환경에서는 도파관 불변인자를 식 2.13으로 간단히 표현할 수 있다.

$$\beta = \cos^2\phi \quad (2.13)$$

이것은 임계각(Critical angle)이  $20^\circ$  이하인 천해(Shallow water)에서는 도파관 불변 인자가 모드 군에 대해 대략적으로 1로 일정하다는 것을 보여준다. 다음 장에서 다루는 배열 불변성은 도파관 불변 인자가 1인 특수한 경우에 해당한다.



## 2.2 배열 불변성

배열 불변성은 천해에서 음원의 거리를 추정하는 기법으로 이상적인 도파관(Ideal waveguide)에서 광대역 신호의 확산 특징에 기반을 둔다. 이 기법은 평면파와 빔 형성(Plane wave beamforming)을 사용하여 빔-시간 영역 세기패턴을 얻으며 이를 통해 거리를 추정한다. 본 절에서는 배열 불변성 기반의 거리 추정 알고리즘의 유도 과정을 살펴본다[8].

해양 도파관 환경에서  $n$  번째 모드가 수신되는 시간  $t$ 는 음원과 수신기 중심 사이의 거리  $r_0$ 와  $n$  번째 모드의 군속도  $v_{gn}$ 의 비로 다음 식과 같다.

$$t = \frac{r_0}{v_{gn}(\tilde{f})} \quad (2.14)$$

이 때  $\tilde{f}$ 는 송신음원의 주파수 대역을 만족하는 주파수이다.

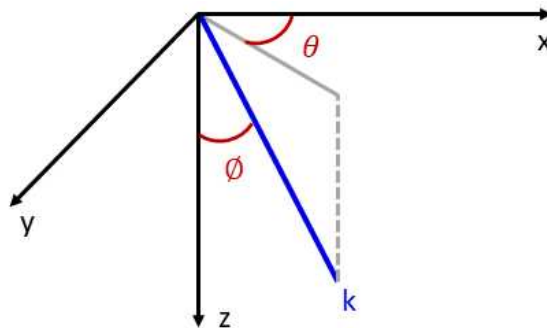


Fig. 2.3 고각( $\phi$ )과 방위각( $\theta$ )의 정의

좌표계에서 고각  $\phi$ 와 방위각(Bearing angle)  $\theta$ 을 그림 2.3와 같이 설정하였을 때  $n$  번째 모드가 수신되는 시간  $t$ 에서 최대 빔 형성 압력은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\tilde{s}_n(t) = \sin\tilde{\phi}_n(t)\sin\theta_0 \quad (2.15)$$

위 식을 거리에 대한 함수로 나타내기 위해 다음과 같은 이상적인 도파관에서 군속도와 고각의 관계를 이용한다.

$$\begin{aligned} v_{gn} &= \frac{\partial\omega}{\partial k_{rn}} = \frac{2\pi\partial f}{\partial\sqrt{k^2 - k_{zn}^2}} = \frac{2\pi\partial f}{\partial k \frac{k}{k_{rn}}} \\ &= \frac{2\pi\partial f}{\partial k} \sin\phi_n = c \sin\phi_n \end{aligned} \quad (2.16)$$

위 식에서  $c$ 는 수중에서 음파의 전달속도를 의미한다.  $k$ 는 파수를 나타내며  $k_{zn}$ 은  $n$ 번째 모드의 수직파수,  $k_{rn}$ 은  $n$ 번째 모드의 수평파수이다. 식 2.14와 식 2.16을 식 2.15에 대입하면 다음 수식을 얻을 수 있다.

$$\tilde{s}_n(t) \equiv \tilde{s}(t) = \frac{r_0}{ct} \sin\theta_0 \quad (2.17)$$

이 식에 의하면 음원의 거리는 음원의 주파수, 모드 차수, 음원의 깊이, 수신기의 깊이, 도파관의 깊이에 독립적이라는 것을 알 수 있다. 따라서

이상적인 도파관에서 배열 불변성 기반의 거리추정은 환경정보 없이 거리 추정이 가능하다.

$\tilde{s}_n(t)$ 를  $\tilde{s}(t)$ 로 모드에 대해 합쳐서 사용한 이유는 그림 2.4를 통해 설명된다. 그림 2.4은 수식을 통해 구현한 주파수 대역에 따른 빔-시간 영역 세기 패턴으로 주파수 대역이 좁으면 불연속적인 선을 이루지만 주파수 대역이 넓으면 연속적인 하나의 선을 이룬다는 것을 보여준다. 따라서 음원이 충분한 주파수 대역을 갖는다면 하나의 모드만을 이용하여 거리 추정이 가능하다는 것을 의미한다.

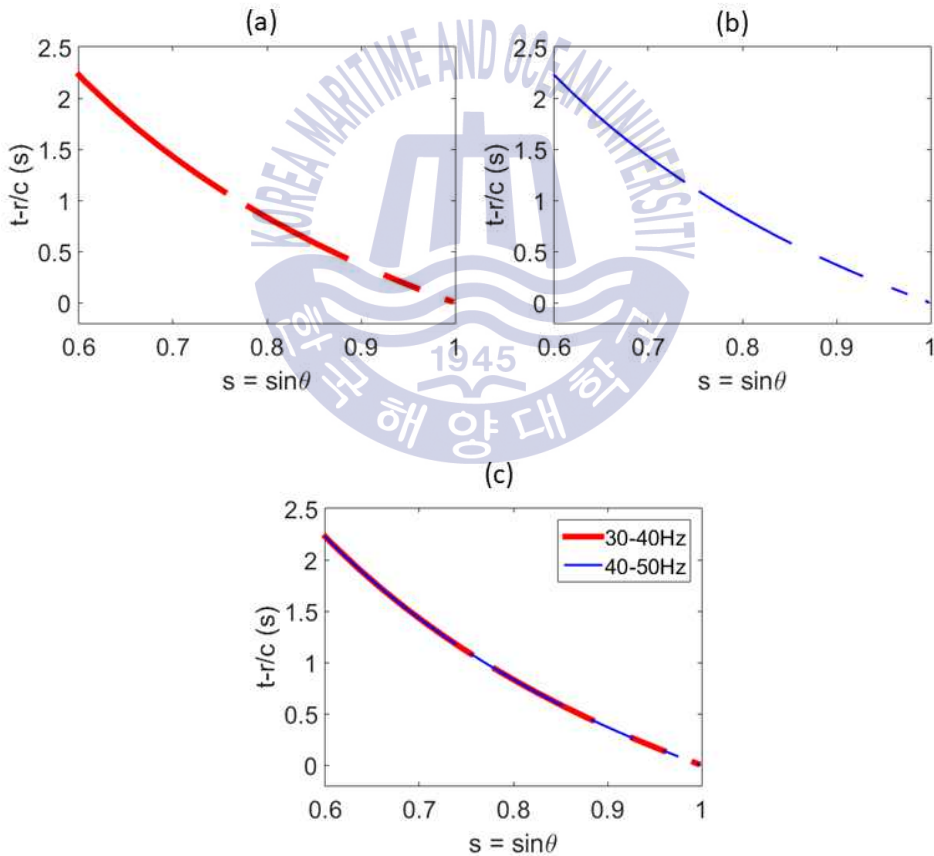


Fig. 2.4 주파수 대역에 따른 빔-시간 영역 세기 패턴, (a) 주파수 대역 30-40Hz, (b) 주파수 대역 40-50Hz, (c) 주파수 대역 30-50Hz

이 때, 음속 구조가 깊이에 따라 변한다면  $\tilde{s}(t)$ 를 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\tilde{s}(z,t) \simeq \frac{r_0}{c(z)t} \sin\theta_0 \quad (2.20)$$

음원의 주파수 대역이 충분히 클 때 빔-시간 영역 세기 패턴에서 연속적인 선의 기울기를 배열 불변 인자  $\chi$ 로 정의한다. 이것은 식 2.20을 시간  $t$ 에 대해 미분한 것과 같으며 아래 식과 같다.

$$\chi \equiv \frac{d\tilde{s}(z,t)}{dt} \simeq -\frac{c(z)}{r_0} \sin\theta_0 \quad (2.21)$$

식 2.14의 변수를 이항하여 거리에 대해 정리하면 다음과 같다.

$$\hat{r}_0 = -\frac{c(z)}{\hat{\chi}} \sin\hat{\theta}_0 \quad (2.15)$$

위 식에서  $\hat{r}_0$ 는 거리 추정치,  $\hat{\chi}$ 는 배열 불변 인자의 추정치,  $\hat{\theta}_0$ 는 음원의 방위각 추정치이다. 음파의 전달속도  $c(z)$ 는 수신기가 위치한 깊이에서의 음속을 사용한다, 만약 음속을 측정할 수 없다면 1490m/s를 사용한다. 해양환경에서 음속은 1440~1540m/s 사이이기 때문에 이 식에 적용하였을 때 큰 오차를 발생시키지 않는다. 최종적으로 본 논문에서는 위 식을 통해 거리를 추정한다.

### 3. 배열 불변성 기반의 거리 추정: 모의실험 및 해상실험 결과

본 장에서는 배열 불변성 기반의 거리 추정 알고리즘을 검증한다. 먼저 해상실험 환경과 장비의 구성에 대해 설명한다. 해상실험과 동일한 환경에 대한 모의실험을 수행하고 이를 해상실험 데이터에 적용한 결과와 비교하여 분석한다.

#### 3.1 해상실험 내용 및 장비의 구성

본 논문에 적용된 실험은 수심이 약 50m인 진해항 인근 해역에서 수행되었으며 구성은 그림 3.1과 같다. 음원은 전구를 깨트려 발생된 충격파 신호를 사용하였고 선박에 케이블을 연결하여 수심 30m로 예인하였다. 수신 배열은 해저면에 설치되었다. 본 실험은 한국해양과학기술원(KIOST)의 장비를 사용하였으며 한국해양과학기술원으로부터 실험 데이터를 지원 받았다

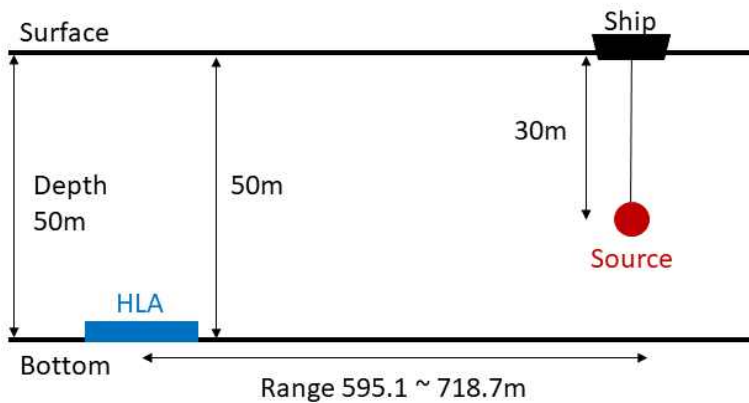


Fig. 3.1 실험 구성 측면도

실험 데이터는 두 가지로 Case 1은 음원과 수신기 사이의 거리가 767.5m, 방위각이  $76.8^\circ$  이고 Case 2는 음원과 수신기 사이의 거리가 718.7m, 방위각이  $-41.7^\circ$  로 설정되어 있다. 각 경우 음원과 송신기의 위치는 그림 3.2와 같다. 그림에서 파란색 선은 수평 선 배열의 위치이고 빨간색 점은 음원의 위치를 나타낸다. 두 경우의 음속 분포는 그림 3.3과 같다.

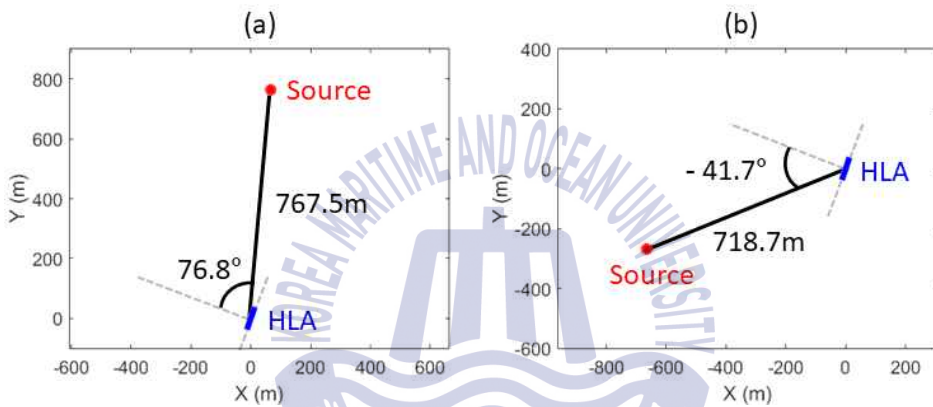


Fig. 3.2 실험 구성 평면도, (a) Case 1, (b) Case 2

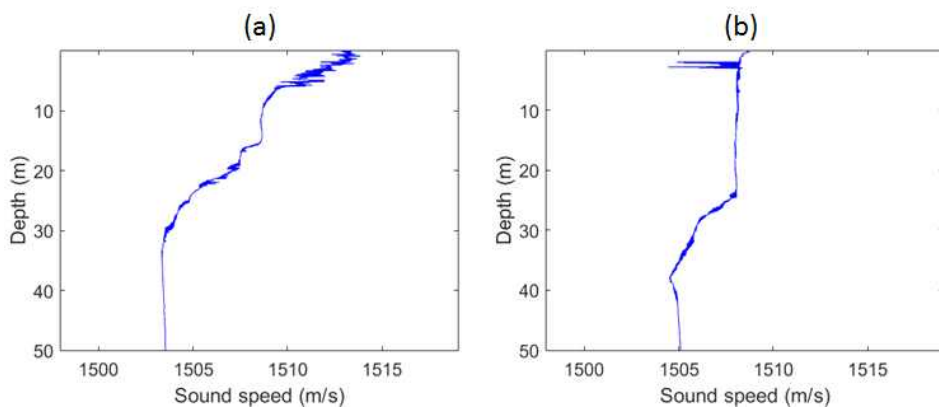


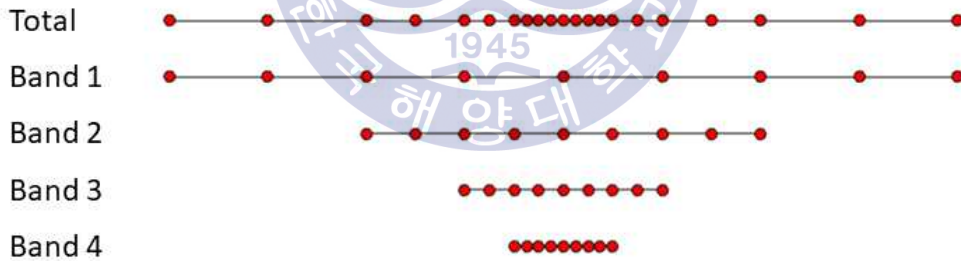
Fig. 3.3 음속 분포, (a) Case 1, (b) Case 2



수신 배열은 네 가지 주파수를 처리하기 위해 설계된 수평 네스티드 (Nested) 배열을 사용하였으며 총 길이는 60m이다. 각 대역의 정보는 표 3.1과 그림 3.4에 나타내었다.

**Table 3.1** 수신 배열의 주파수 대역

	설계 주파수 (Hz)	센서 간격 (cm)	총 길이 (m)
Band1	100~200	750	60
Band2	200~400	375	30
Band3	400~800	187.5	15
Band4	800~1600	93.75	7.5



**Fig. 3.4** 주파수 대역에 따른 수신 배열 간격

### 3.2 모의실험 결과 분석

배열 불변성 기반의 거리 추정 알고리즘을 검증하기 위해서 모의실험을 수행하였다. 모의실험은 음원과 수신기의 위치를 해상실험과 동일하게 설정하여 Case 1과 Case 2 두 경우에 대해 분석한다. 수신 배열 또한 동일하게 설정하였다. 송신 신호는 시간의 변화에 따라 주파수가 선형적으로 증가하는 LFM(Linear Frequency Modulation) 신호를 사용하였고 100~250Hz의 대역폭(Band width)을 가지며 해닝(Hanning) 함수로 가중치를 부여하였다. 시간영역과 주파수 영역의 송신신호는 그림 3.5와 같다.

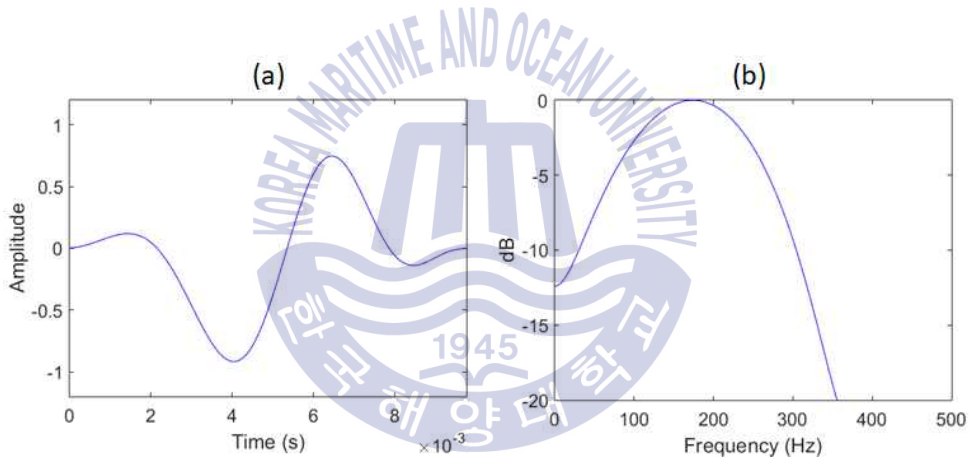


Fig. 3.5 송신 신호, (a) 시간 영역의 송신 신호, (b) 주파수 영역의 송신 신호

해상실험 당시 해역의 환경정보를 토대로 정규 모드 기반의 KRAKEN 프로그램을 수행하여 음원과 수신기 사이의 그린함수(Green's function)를 구하였다.

송신 신호의 스펙트럼과 그린함수를 곱한 후 역 푸리에 변환(Inverse fourier transform)하여 그림 3.6과 같은 수신 신호를 모의하였다.

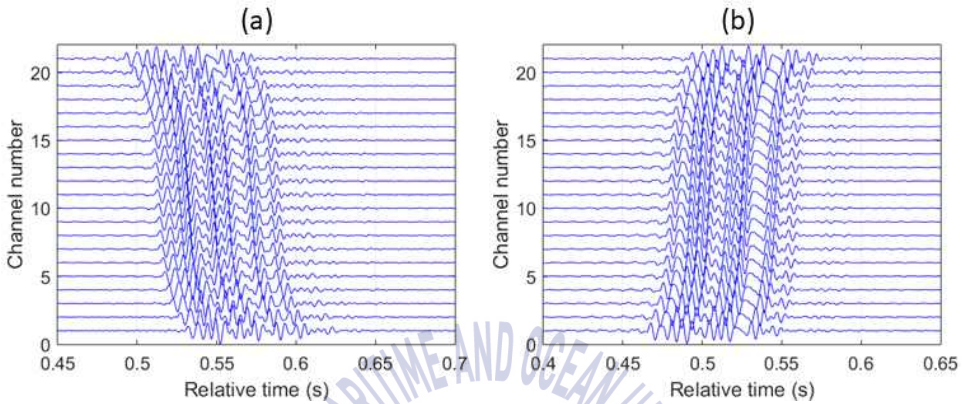


Fig. 3.6 모의실험 수신 신호, (a) Case 1, (b) Case 2

수신 신호의 시간영역 평면과 빔 형성을 통해 빔-시간 영역 세기 패턴을 얻을 수 있다. 빔-시간 영역 세기를  $L_{bt}(s, t)$ 라 하고 그림 3.7에 나타내었다. 빔-시간 영역 세기 패턴에서 음원의 방위각은 가장 큰 값이 위치하는 각도에 해당한다. 저차 모드 일수록 속도가 빠르고 감쇠와 분산이 적어 가장 큰 값을 나타내며 고각이  $0^\circ$ 에 가깝기 때문에 방위각으로 적절하다. 그림 3.7의 파란색 점선은 음원의 방위각( $\sin\theta$ )을 의미한다.

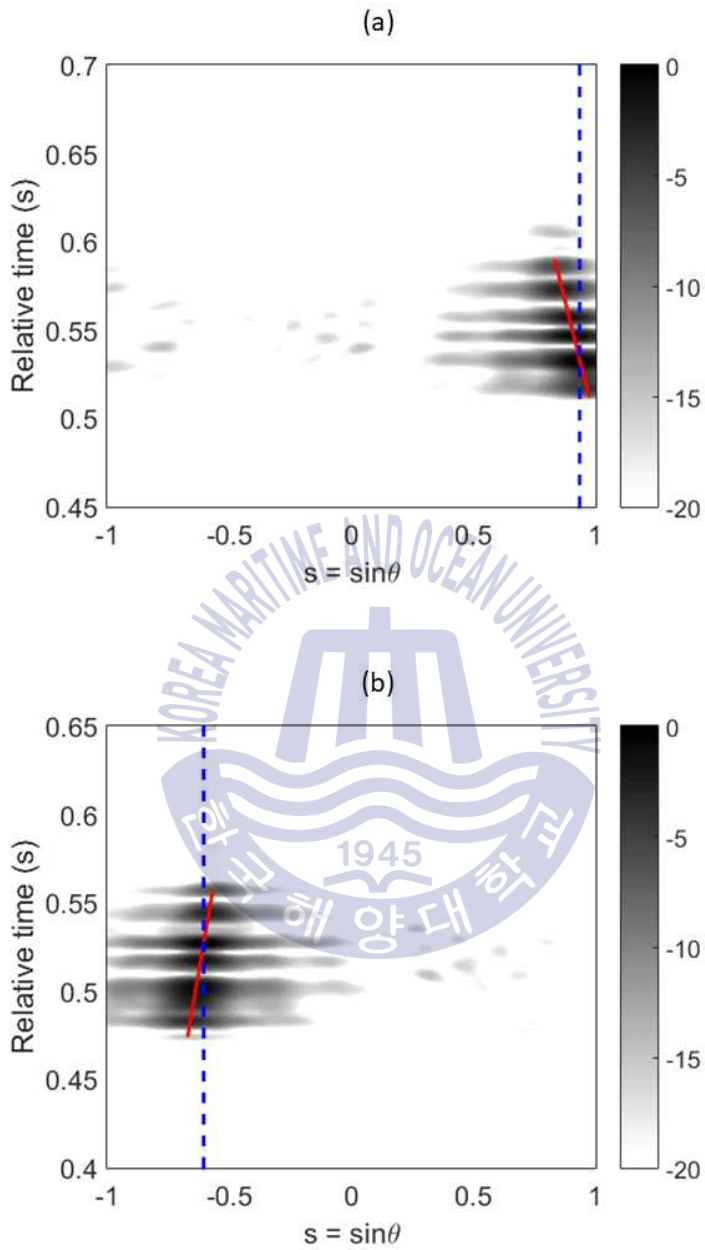


Fig. 3.7 빔-시간 영역 세기 패턴, (a) Case 1, (b) Case 2

빔-시간 영역 세기 패턴의 기울기인 배열 불변 인자를 얻기 위해 최소 자승 근사를 사용한다. 이론적 배경은 Appendix에서 자세히 설명하였다 [15].

$$\hat{s}(t) = \hat{\chi}t + d \quad (3.2)$$

이것은 기울기가  $\hat{\chi}$ 이고 상수항이  $d$ 인  $t$ 에 관한 일차식 3.2의 기울기를 구하는 것과 같으며 그림 3.7의 빨간색 선은 일차식 3.2를 의미한다. 결론적으로 식 3.3을 통하여 배열 불변 인자를 구한다.

$$[\chi \ d]^T = (T^T T)^{-1} T^T S_1 \quad (3.3)$$

$$S_1 = [s_{\max}(t_1), s_{\max}(t_2), \dots, s_{\max}(t_N)]^T$$

$$s_{\max}(t) = \arg_s \max L_{ut}(s, t)$$

$$T = [(t_1, t_2, \dots, t_N)^T \mathbf{1}^T], \quad t_j = t_1 + (j-1)\Delta t_s$$

$$\mathbf{1} = [1, 1, \dots, 1]$$

위 식에서  $s_{\max}(t)$ 는 빔-시간 영역 세기에 문턱 값(Threshold)을 설정한 뒤 시간에 따른 최댓값이 위치하는 각도이다.

음파의 전달 속도는 수신기 위치에서 측정값인 1516m/s를 사용하였고 추정된 방위각과 배열 불변 인자를 아래 거리 추정 식에 대입하면 표 3.2와 같은 거리 추정 결과를 얻는다.

$$\hat{r} = -\frac{c(z)}{\hat{\chi}} \sin \hat{\theta} \quad (3.4)$$

**Table 3.2** 모의실험 거리 추정 결과

Case 1		Case 2	
실제 각도 (°)	76.8	실제 각도 (°)	-41.7
추정 각도 (°)	69.1	추정 각도 (°)	-37.1
오차율 (%)	10.0	오차율 (%)	11.0
실제 거리 (m)	767.5	실제 거리 (m)	718.7
추정 거리 (m)	776.2	추정 거리 (m)	747.5
오차율 (%)	1.1	오차율 (%)	4.0

Case 1과 Case 2 두 경우 1.1%와 4.0%로 매우 작은 오차를 보이며 효율적인 거리 추정이 가능하다고 볼 수 있다.

### 3.3 해상실험 결과 분석

해상실험에서 Case 1과 Case 2 두 경우의 시간 영역과 주파수 영역의 수신신호는 그림 3.8, 그림 3.9와 같다. 수신 신호의 주파수는 100~250Hz에서 우세한 경향을 보인다. 해상실험을 통해 얻은 수신 신호를 사용하여 모의실험과 같은 방법으로 거리 추정을 실시한다.

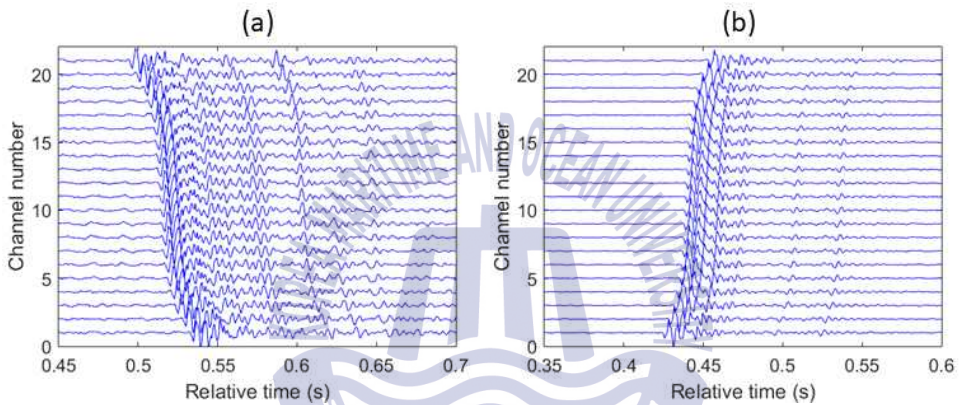


Fig. 3.8 해상실험 시간 영역의 수신 신호, (a) case 1, (b) case 2

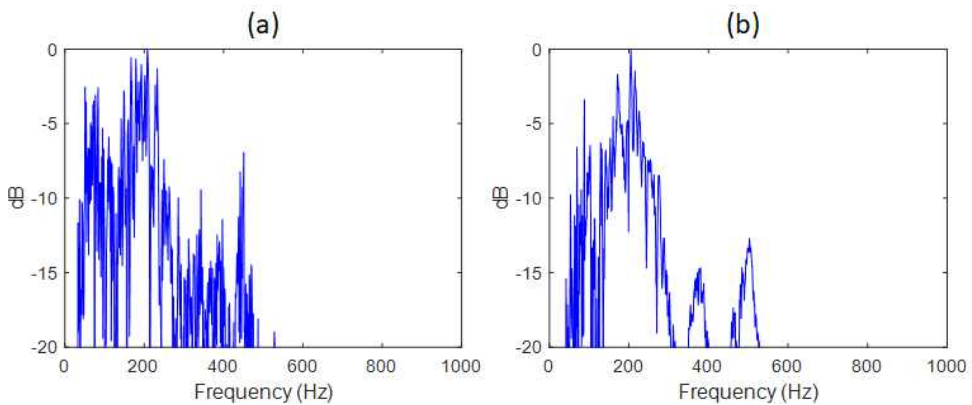


Fig. 3.9 해상실험 주파수 영역의 수신 신호, (a) case 1, (b) case 2

수신 신호의 시간영역 평면과 빔 형성을 통해 그림 3.10을 얻는다. 그림에서 파란색 점선은 음원의 방위각( $\sin\theta$ )을 빨간색 선은 패턴의 경향을 나타내는 일차식으로 배열 불변 인자를 기울기로 갖는다.

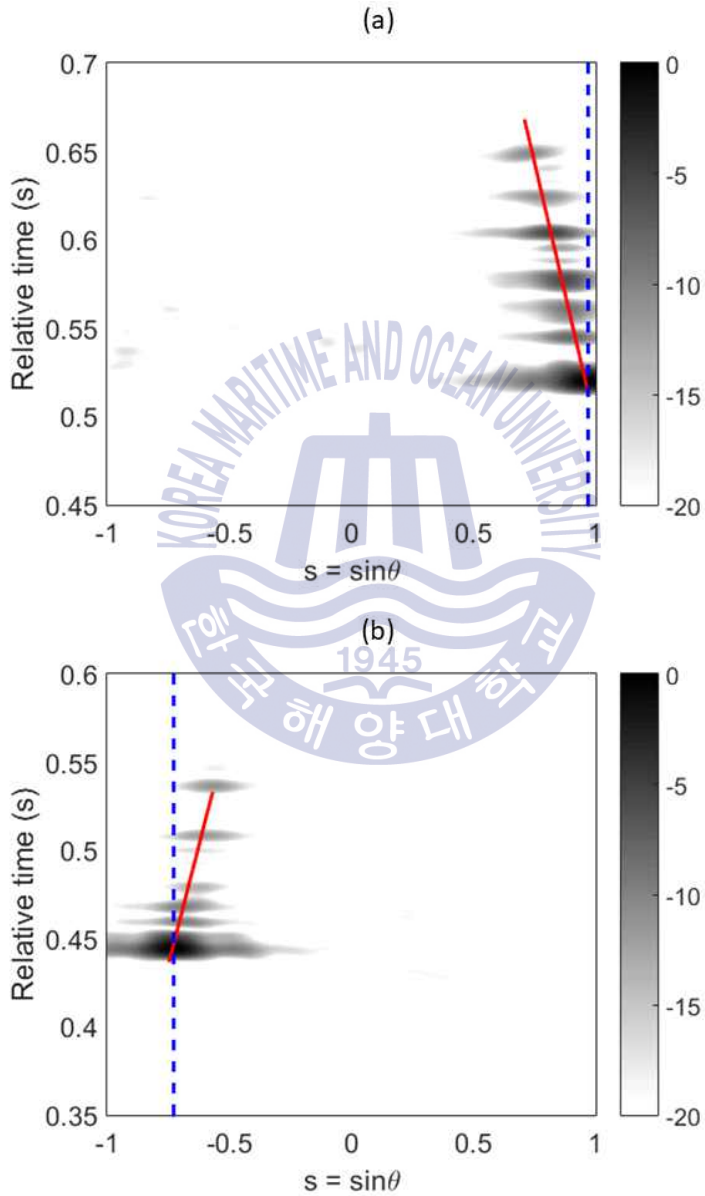


Fig. 3.10 빔-시간 영역 세기 패턴, (a) case 1, (b) case 2



음파의 전달 속도는 수신기 위치에서 측정값인 1516m/s를 사용하고 그림 3.10을 통해 추정된 방위각과 배열 불변 인자를 거리 추정 식에 대입하면 표 3.3과 같은 거리 추정 결과를 얻는다.

**Table 3.3** 해상실험 거리 추정 결과

Case 1		Case 2	
실제 각도 (°)	76.8	실제 각도 (°)	-41.7
추정 각도 (°)	75.7	추정 각도 (°)	-46.7
오차율 (%)	1.4	오차율 (%)	12.0
실제 거리 (m)	767.5	실제 거리 (m)	718.7
추정 거리 (m)	872.1	추정 거리 (m)	596.5
오차율 (%)	13.6	오차율 (%)	17.0

해상실험 거리 추정 결과 오차율 13.6%, 17.0%의 성능을 보인다. 모의실험에 비해 오차가 늘어난 원인은 실제 해양의 불안정성과 음원과 배열 예인 시 조류의 영향에 의한 위치 정보의 부정확성에 의한 것으로 추측할 수 있다. 해상실험 시 음원과 수신 배열은 선박에 의해 예인되며 선박의 움직임에 의해 진행방향 뒤 쪽으로 기울어짐이 발생한다. 또한 수신배열의 경우 선박이 일자로 예인하며 끌고 간 후 일정 지점에서 배열을 해저면에 설치한다. 배열이 선박의 진행방향에 맞추어 일자로 설치되었다는 가정 하에 배열 중심의 위치를 계산하여 결정하는데 이 때 실제 실험 환경에서의 기울어짐, 위치, 모양 등을 보정한다면 더 정확한 결과를 얻을 수 있다. 오차의 또 다른 원인으로 음원 신호 길이의 영향임을 예측할 수 있다. 송신 신호의 길이에 따른 성능은 4장에 제시된다.

## 4. 배열 불변성 기반의 거리 추정: 성능 분석 및 예측

본 장에서는 여러 가지 요소에 따른 거리 추정 성능을 비교한다. 먼저 모의실험의 기본적인 환경설정에 대해 설명하고 음원의 방위각, 송신 신호의 길이, 수신기의 설계 주파수와 길이에 따른 모의실험을 수행한다.

### 4.1 모의실험 환경

모의실험은 수심을 50m로 일정하게 설정하고 수신기는 해저면에, 음원은 수심 30m에 위치시켰다. 음원과 수신 배열의 중심 사이의 거리는 1km, 방위각은  $30^\circ$  로 설정하였다. 그림 4.1과 4.2에서 파란색 선은 수평선 배열이고 빨간색 점은 음원을 나타낸다. 음속은 수심에 따라 1500m/s로 일정한 Pekeris 음속 구조이다.

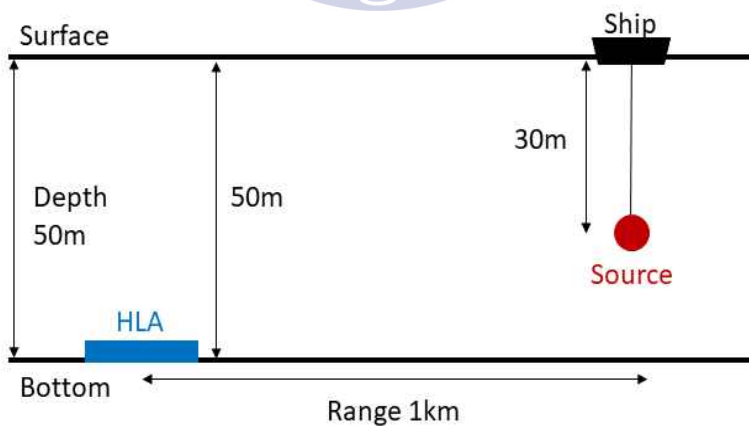


Fig. 4.1 모의실험 구성 측면도

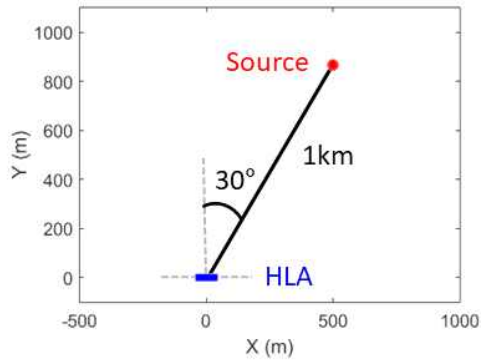


Fig. 4.2 모의실험 구성 평면도

송신 신호는 시간의 변화에 따라 주파수가 선형적으로 증가하는 LFM 신호를 사용하였고 100~250Hz의 대역폭을 가진다. 신호 길이는 0.1초이며 해닝 함수로 가중치를 부여하였다. 시간영역과 주파수 영역의 송신신호는 그림 4.3과 같다.

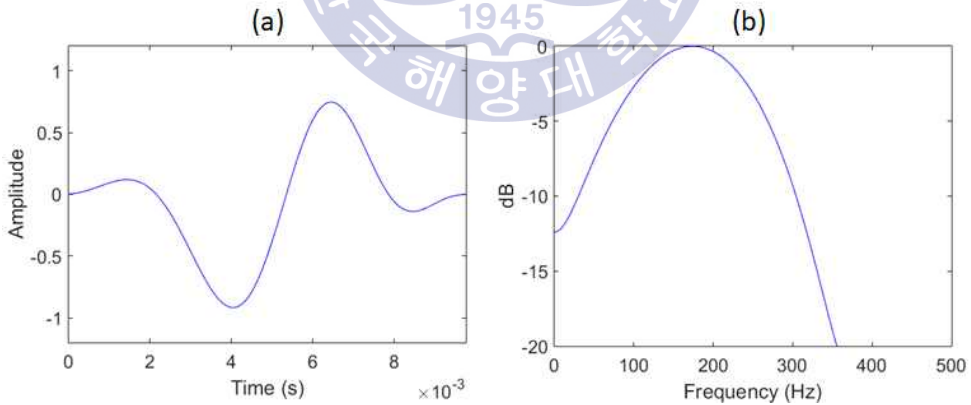
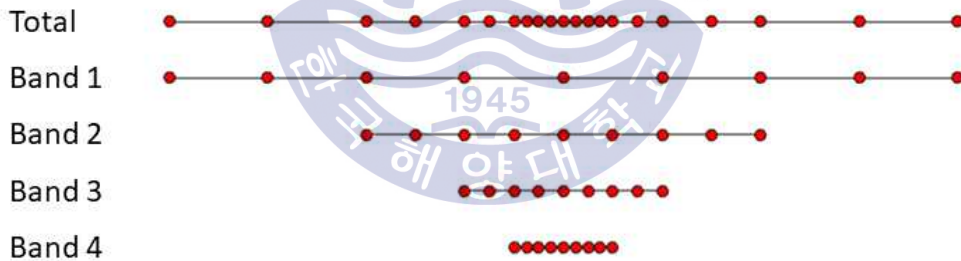


Fig. 4.3 송신 신호, (a) 시간 영역의 송신 신호, (b) 주파수 영역의 송신 신호

수신 배열은 네 가지 주파수를 처리하기 위해 설계된 수평 네스티드 선 배열이며 각 대역의 정보는 표 4.1과 같다.

**Table 4.1** 수신 배열의 주파수 대역

	설계 주파수 (Hz)	센서 간격 (cm)	총 길이 (m)
Band1	100~200	750	60
Band2	200~400	375	30
Band3	400~800	187.5	15
Band4	800~1600	93.75	7.5



**Fig. 4.4** 주파수 대역에 따른 수신 배열 간격

## 4.2 음원의 방위각에 따른 거리 추정 성능

음원의 방위각에 따른 거리 추정 성능을 분석하기 위해 주어진 환경에서 방위각을 변경하여 두 가지 경우에 대해 분석한다. 첫 번째는 음원을 브로드사이드(Broadside) 방향에 위치시켜 이때의 음원의 방위각을  $0^\circ$  로 설정하였다. 원거리 음장(Far field)으로 가정할 때 음원에서 발생한 신호는 수신 배열의 각 채널에 동시에 도착하게 된다. 두 번째는 음원을 앤드 파이어(Endfire)방향에 위치시키고 이때의 방위각을  $90^\circ$  로 한다. 두 경우에 대한 모의실험 구성 평면도를 그림 4.5에 나타내었다.

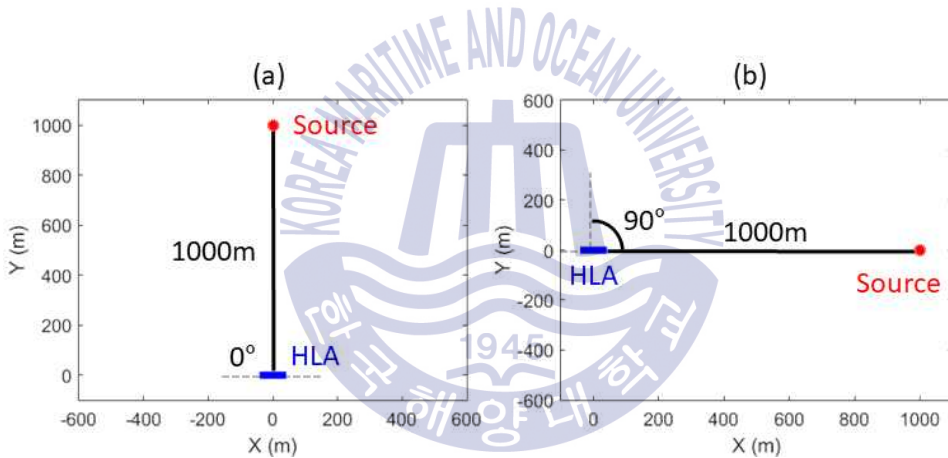


Fig. 4.5 모의실험 구성 평면도, (a) 음원이 브로드사이드 방향( $0^\circ$ )에 위치할 경우, (b) 음원이 앤드 파이어 방향( $90^\circ$ )에 위치할 경우

정규 모드 기반의 KRAKEN 프로그램을 수행하여 음원과 수신기 사이의 그린함수를 구하였다. 송신 신호의 스펙트럼과 그린함수를 곱한 후 역 푸리에 변환하여 그림 4.6과 같은 수신 신호를 모의하였다.

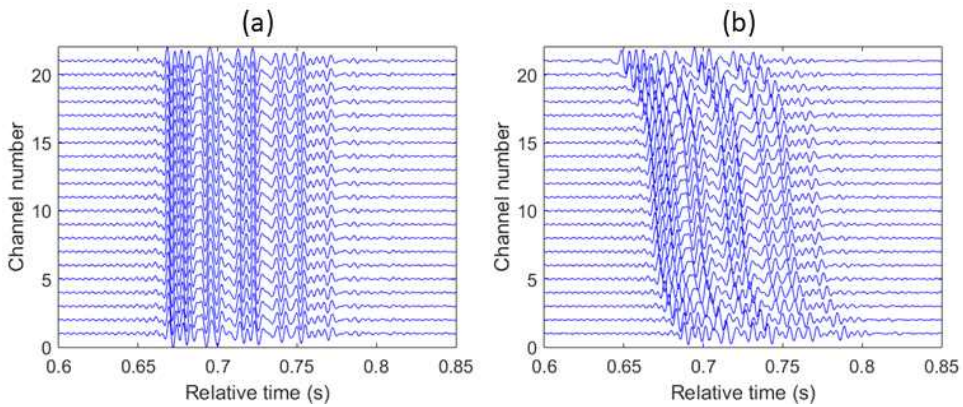


Fig. 4.6 수신 신호, (a) 음원이 브로드사이드 방향( $0^\circ$ )에 위치할 경우, (b) 음원에서 앤드 파이어 방향( $90^\circ$ )에 위치할 경우

수신 신호의 시간영역 평면과 빔 형성을 통해 그림 4.7의 빔-시간 세기 패턴을 얻는다. 음원이 브로드사이드 방향에 위치하면 앤드 파이어 방향에 위치할 때 보다 패턴의 기울기가 급해지는 것을 알 수 있다.

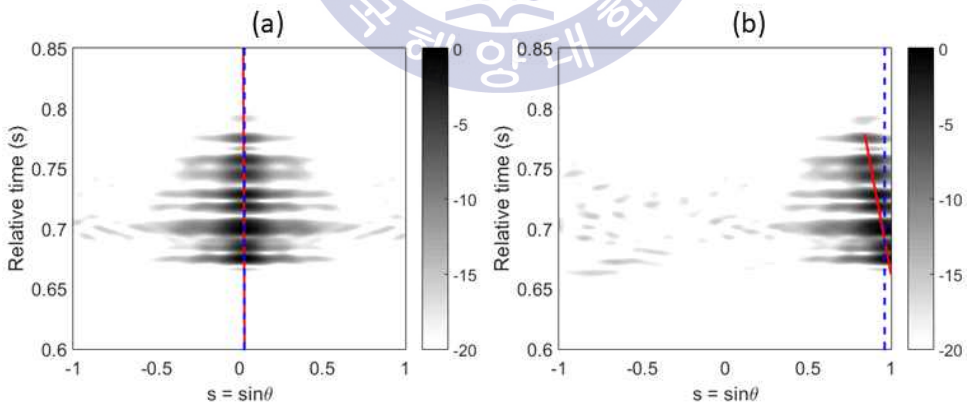
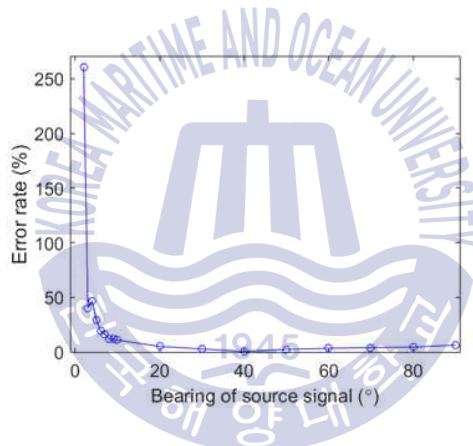


Fig. 4.7 빔-시간 영역 세기 패턴, (a) 음원이 브로드사이드 방향( $0^\circ$ )에 위치할 경우, (b) 음원에서 앤드 파이어 방향( $90^\circ$ )에 위치할 경우

빔-시간 영역 세기 패턴을 통해 음원의 방위각과 배열 불변 인자를 얻고 거리 추정 결과를 표 4.2에 정리하였다. 그림 4.8은 음원의 방위각에 따른 거리 추정 성능을 나타낸다.

**Table 4.2** 음원의 방위각에 따른 거리 추정 결과

각도 (°)	추정 거리 (m)	오차율 (%)
0	측정불가	측정불가
90	1061.7	6.2



**Fig. 4.8** 음원의 방위각에 따른 거리 추정 오차율

표 4.2와 그림 4.8에 따르면 음원의 방위각이 10° 이상인 경우에는 안정적인 거리 추정 성능을 보인다. 음원이 브로드사이드 방향에 있는 경우 빔-시간 영역 세기 패턴의 기울기인 배열 불변 인자가 0에 가까워지며 작은 오차에도 기울기 변화량이 커진다. 따라서 최소 자승법을 통한 정확한 기울기 추정이 불가능하기 때문에 거리 추정 성능이 떨어지게 된다.

### 4.3 송신 신호의 길이에 따른 거리 추정 성능

송신 신호의 길이에 따른 거리 추정 성능을 분석하기 위해 주어진 환경에서 신호의 길이를 변경하여 두 가지 경우에 대해 분석한다. 첫 번째는 송신 신호의 길이가 0.01초이며 두 번째는 송신 신호의 길이가 0.2초로 대역폭은 100~250Hz로 같게 설정하였다. 두 경우의 송신 신호를 그림 4.9에 나타내었다.

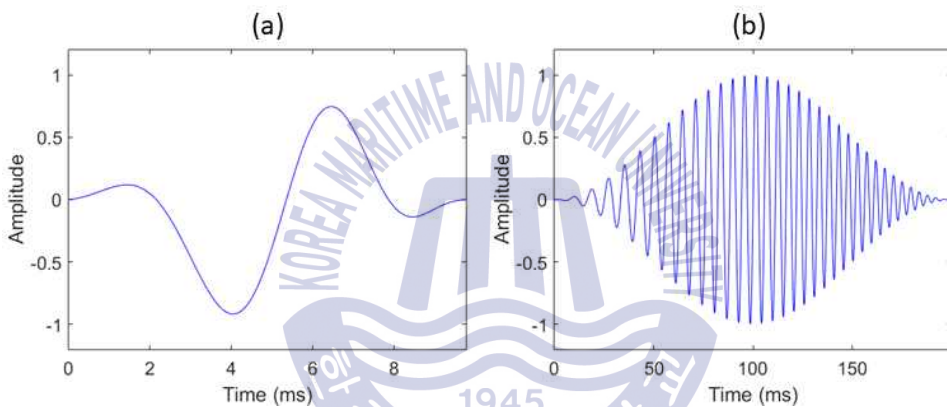


Fig. 4.9 송신 신호, (a) 송신 신호의 길이가 0.01초인 경우, (b) 송신 신호의 길이가 0.2초인 경우

KRAKEN 프로그램을 수행하여 음원과 수신기 사이의 그린함수를 구하였다. 송신 신호의 스펙트럼과 그린함수를 곱한 후 역 푸리에 변환하여 그림 4.10과 같은 수신 신호를 모의하였다.



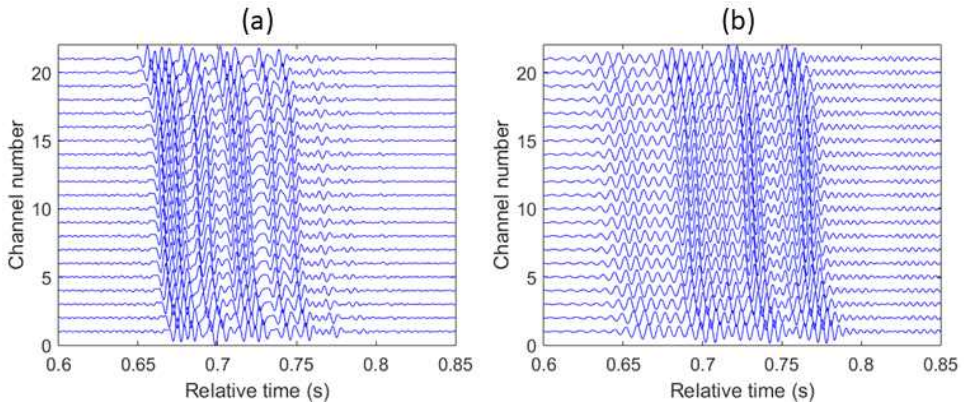


Fig. 4.10 수신 신호, (a) 송신 신호의 길이가 0.01초인 경우, (b) 송신 신호의 길이가 0.2초인 경우

수신 신호의 시간영역 평면과 빔 형성을 통해 그림 4.11의 빔-시간 영역 세기 패턴을 얻는다. 이를 통해 음원의 방위각과 배열 불변 인자를 얻고 거리 추정 결과를 표 4.3에 정리하였다.

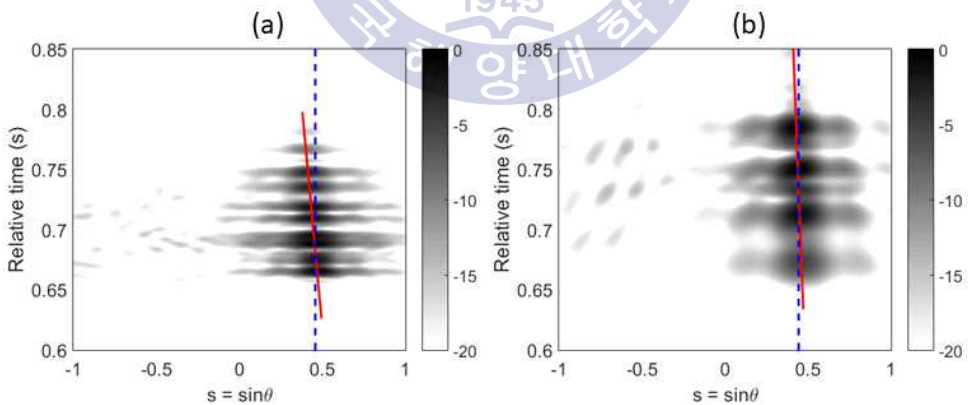
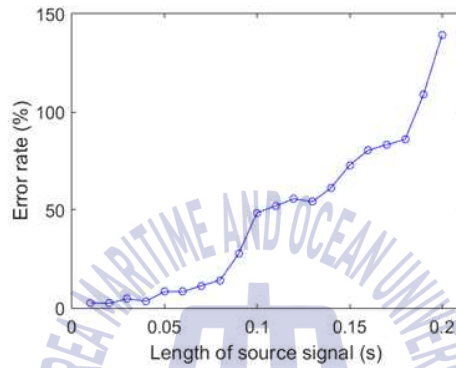


Fig. 4.11 빔-시간 영역 세기 패턴, (a) 송신 신호의 길이가 0.01초인 경우, (b) 송신 신호의 길이가 0.2초인 경우

**Table 4.3** 송신 신호의 길이에 따른 거리 추정 결과

송신 신호의 길이 (s)	추정 거리 (m)	오차율 (%)
0.01	1026.6	2.7
0.20	2393.2	139.3



**Fig. 4.12** 송신 신호의 길이에 따른 거리 추정 오차율

그림 4.12는 송신 신호의 길이에 따른 거리 추정 오차율을 나타낸다. 결과에 따르면 송신 신호가 짧을수록 안정적인 거리 추정 성능을 보인다.

신호가 길어질 때 성능이 저하되는 원인은 채널응답특성(Channel impulse response)과 관련이 있다. 그림 4.13은 모의실험 환경에서 채널응답특성이다. 송신 신호의 길이가 0.01초인 경우의 수신 신호와 매우 유사하지만 송신신호의 길이가 0.2초 일 때와는 다른 경향을 보인다는 것을 확인할 수 있다.

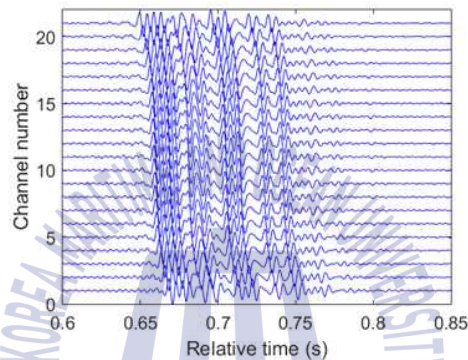


Fig. 4.13 채널응답특성

배열 불변성은 수신 신호에 나타나는 채널응답특성을 이용해 거리를 추정한다. 하지만 송신 신호의 길이가 길어지면 다중경로 영향에 의해 신호가 중첩되기 때문에 수신신호에서 채널응답특성을 바로 파악할 수 없어 거리 추정이 불가능하다. 따라서 배열 불변성 기반의 거리 추정은 임펄스 (Impulse) 신호 분석에 적합한 기법이라 할 수 있다.

#### 4.4 수신기의 설계 주파수와 길이에 따른 거리 추정 성능

수신기의 설계 주파수와 길이에 따른 거리 추정 성능을 분석하기 위해 네스티드 어레이를 설계 주파수에 따라 네 가지 밴드로 분리하여 모의실험을 하였다. 각 밴드의 센서 간격은 설계 주파수에 대해  $\lambda/2$ 로 설계되었으며 4.1절의 표 4.1과 같다. 송신 신호는 네 경우 모두 같다.

KRAKEN 프로그램을 수행하여 음원과 수신기 사이의 그린함수를 구하였다. 송신 신호의 스펙트럼과 그린함수를 곱한 후 역 푸리에 변환하여 그림 4.14와 같은 수신 신호를 모의하였다. 수신 신호의 시간영역 평면파빔 형성을 통해 그림 4.15의 빔-시간 영역 세기 패턴을 얻는다.

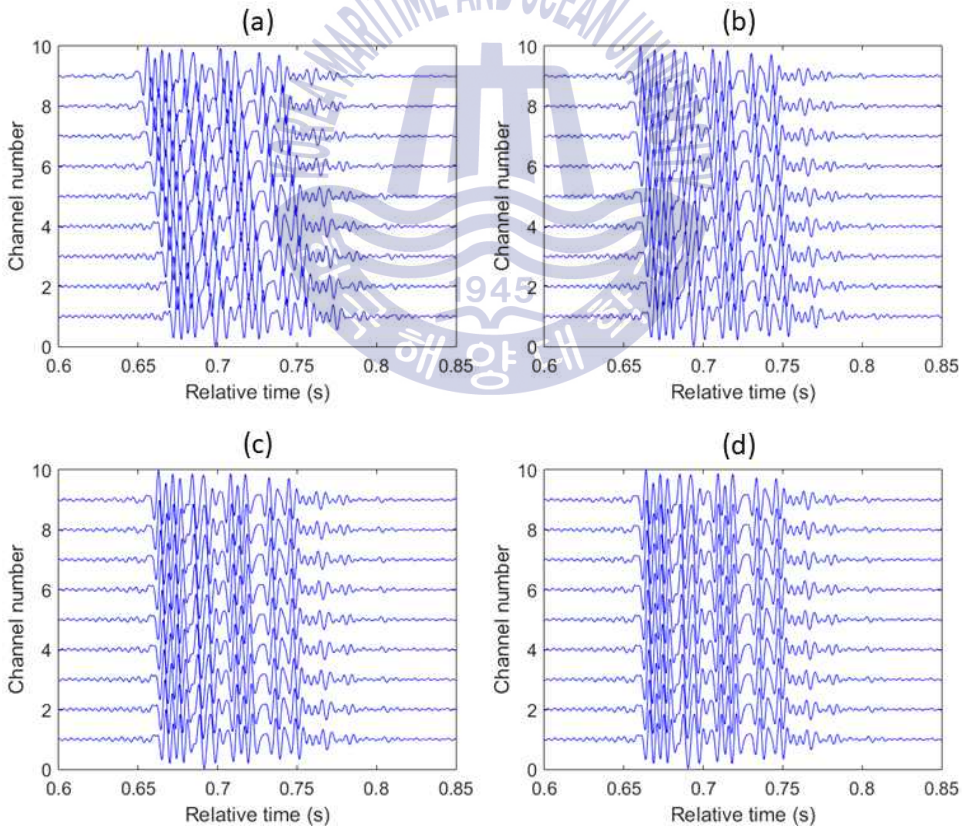


Fig. 4.14 수신 신호, (a) Band 1, (b) Band 2, (c) Band 3, (d) Band 4

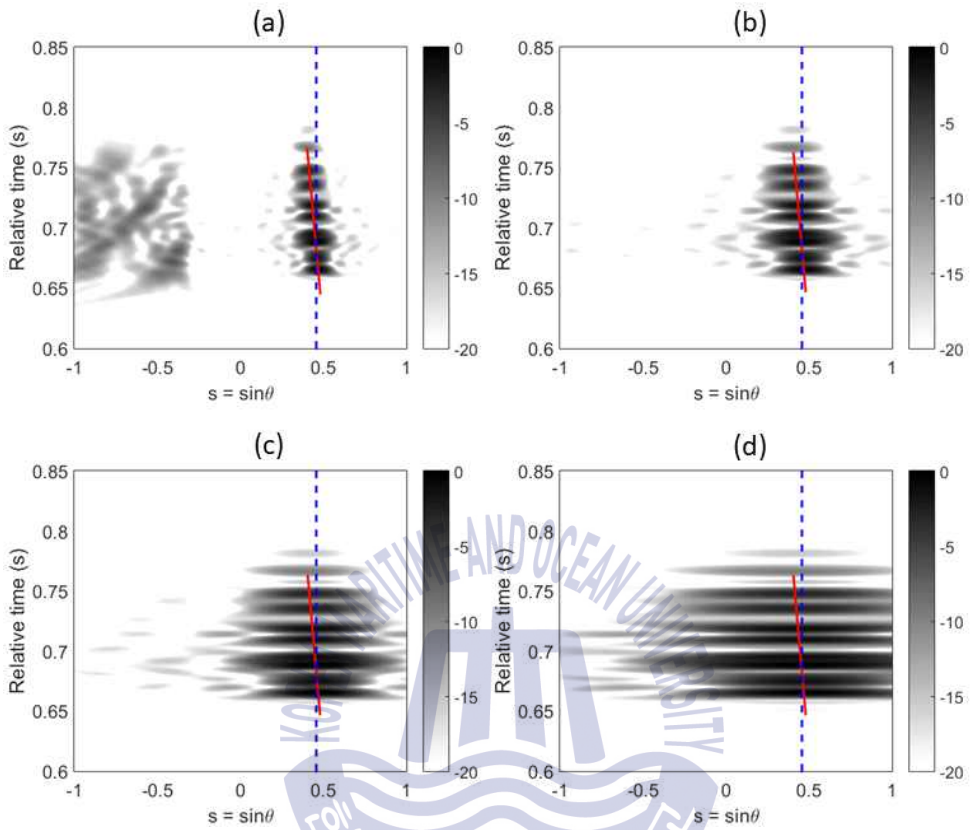


Fig. 4.15 빔-시간 영역 세기 패턴, (a) Band 1, (b) Band 2, (c) Band 3, (d) Band 4

빔-시간 영역 세기 패턴을 통해 음원의 방위각과 배열 불변 인자를 얻고 거리 추정 결과를 표 4.4에 정리하였다.

**Table 4.4** 수신기의 설계 주파수와 길이에 따른 거리 추정 결과

Band	추정 거리 (m)	오차율 (%)
Band 1	1043.8	4.4
Band 2	1063.3	6.3
Band 3	1068.4	6.8
Band 4	1067.6	6.8

따라서 네 경우 모두 거리 추정이 가능하다. 한 가지 송신 신호에 대해 수신배열의 길이와 간격이 다르지만 방위각 추정이 가능하다면 배열의 길이에 관계없이 성능이 저하되지 않는다는 것을 의미한다.

## 5. 결론

### 5.1 결론

배열 불변성 기반의 거리 추정은 환경정보 없이 실시간으로 음원의 거리 추정이 가능한 기법이다. 본 논문에서는 모의실험과 해상실험에 거리 추정 기법을 적용하였다. 또한 여러 가지 요소에 따른 거리 추정 성능을 분석하였다.

배열 불변성 기반의 거리 추정 알고리즘을 검증하기 위해 모의실험을 수행한 결과 설정한 두 가지 경우에 대해 각각 1.1%와 4.0%의 오차율로 매우 정확한 값을 얻었다. 해상실험 데이터에 동일한 기법을 적용하였을 때 오차율이 각각 13.6%와 17.0%인 거리 추정 성능을 보였다. 오차가 커진 원인은 해양 환경의 불안정성과 위치 정보의 부정확성 때문이며 또 다른 원인으로 음원 신호 길이의 영향임을 예측할 수 있다.

여러 가지 요소에 따른 거리 추정 성능을 알아보기 위해 모의실험을 수행하였다. 첫 번째는 음원의 방위각에 따른 성능으로 음원의 방위각이  $10^\circ$  이상인 경우에는 안정적인 거리 추정이 가능했다. 음원이 브로드사이드 방향에 있는 경우 배열 불변 인자가 0에 가까워지며 작은 오차에도 기울기 변화량이 커진다. 따라서 최소 자승법을 통한 정확한 기울기 추정이 불가능하기 때문에 거리 추정 성능이 떨어지게 된다. 두 번째는 송신신호의 길이에 따른 성능으로 신호가 짧을수록 높은 정확도를 나타냈다. 배열 불변성은 수신 신호에 나타나는 채널응답특성을 이용해 거리를 추정한다. 송신 신호의 길이가 길어지면 다중경로 영향에 의해 신호가 중첩되어 수신신호에서 채널응답특성을 바로 파악할 수 없기 때문에 거리 추정이 불가능하다. 세 번째는 수신기의 설계 주파수와 길이에 따른 성능이다. 수

신기를 통해 음원의 방위각 추정이 가능하다면 배열의 길이에 관계없이 거리 추정이 가능하다는 것을 확인했다.

본 논문에서는 배열 불변성 기반의 거리 추정이 가능함을 확인하고 알고리즘의 성능을 분석하였다. 이를 통해 실제 해양 환경에서의 거리 추정 결과를 예측할 수 있다.





## 5.2 향후 과제

배열불변성 기반의 거리추정 기법의 성능 분석을 통해 한계점 두 가지를 제시하였다. 첫 번째는 음원의 방위각이  $10^\circ$  이하 일 때 거리 추정 성능이 불안정한 것이다. 이 문제는 그림 5.1과 같이 배열을 Y자 형태로 배치하는 것으로 극복가능하다. 두 번째는 신호의 길이가 긴 경우 거리 추정이 불가능하다는 것이다. 선박 방사소음과 같이 긴 신호에 배열 불변성 기법을 적용시킬 수 없으므로 알고리즘의 개선이 필요한 것으로 보인다.

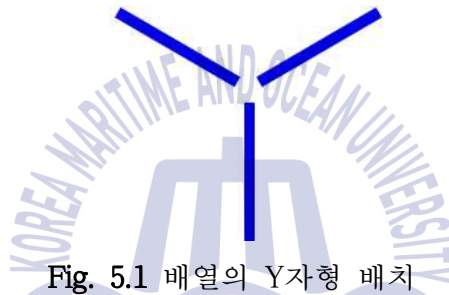


Fig. 5.1 배열의 Y자형 배치

그림 5.3은 모의실험 환경을 그림 5.2와 같게 하고 음원의 깊이를 달리 하였을 때 빔-시간 영역 세기 패턴을 나타낸다. 이는 빔-시간 영역 세기 패턴이 음원과 수신 배열의 깊이에 따라 변함이 있음을 의미하고 이 패턴을 통해 음원의 깊이를 추정할 수 있는지에 대해 향후 연구가 필요하다.

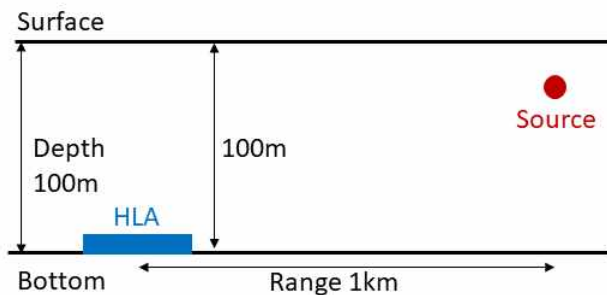


Fig. 5.2 음원 깊이에 따른 모의실험 환경 측면도

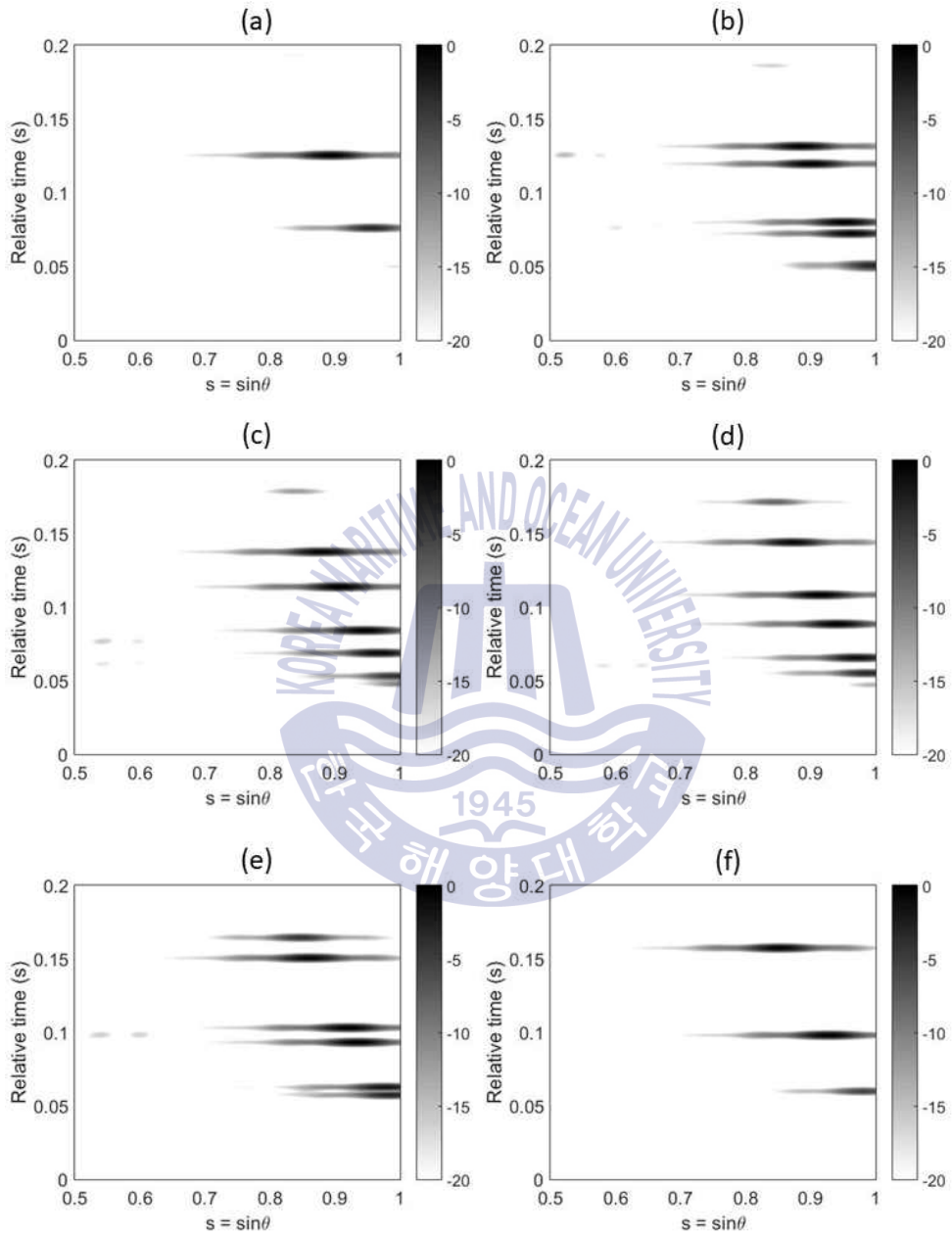


Fig. 5.3 음원의 깊이에 따른 빔-시간 영역 세기 패턴, (a) 1m, (b) 20m, (c) 40m, (d) 60m, (e) 80m, (f) 100m

## 참고문헌

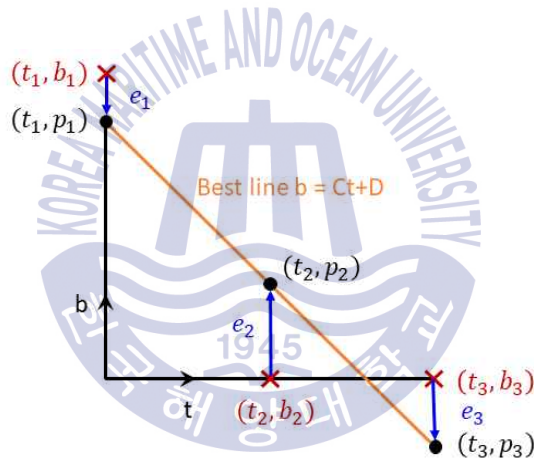
- [1] Lawrence, E.K. Austin, R.F. Alan, B.C. and James V.S., 1999. *Fundamentals of acoustics*. 4th Ed., Wiley: New Jersey
- [2] 김재수., 2005. *수중음향학 및 소나공학 (Underwater Acoustics and Sonar Engineering)*, 한국해양대학교 해양공학과 강의자료
- [3] Tiemann, C., Martin, S. and Mobley, J.R.J., 2006. Aerial and acoustic marine mammal detection and localization on navy ranges. *Institute of Electrical and Electronics Engineers*, 31(1), pp.107-119.
- [4] Baggeroer, A.B., Kuperman, W.A. and Schmidt, H., 1988. Matched field processing: Source localization in correlated noise as an optimum parameter estimation problem. *Institute of Electrical and Electronics Engineers*, 83, pp.571-587.
- [5] Baggeroer, A.B., Kuperman, W.A. and Mikhalevsky, P.N., 1993. An overview of matched field method in ocean acoustics. *Institute of Electrical and Electronics Engineers*, 18(4), pp.401-424.
- [6] Jensen, F.B., Kuperman, W.A., Porter, M.B. and Schmidt, H., 2011. *Computational ocean acoustic*, 2nd Ed. springer:New York.
- [7] 천승용, 김세영, 김기만, 2007. 수중에서 광대역 간섭 패턴을 이용한 음원의 위치 추정 연구. *한국음향학회*, 26(8), pp.415-425.
- [8] Lee, S.W. and Nicholas C.M., 2006. The array invariant. *Acoustical Society of America*, 119(1), pp.336-351.

- [9] Song, H.C. and Cho, C.G., 2015. The relation between the waveguide invariant and array invariant. *Acoustical Society of America*, 138(2), pp.899-903.
- [10] Cho, C., Song, H.C. and Hodgkiss, W.S., 2016. Robust source-range estimation using the array/waveguide invariant and a vertical array. *Acoustical Society of America*, 139(1), pp.63-69.
- [11] Song, H.C. and Cho, C.G., 2017. Array invariant-based source localization in shallow water using a sparse vertical array. *Acoustical Society of America*, 141(1), pp.183-188.
- [12] Cho, C.G., Song, H.C., 2017. Impact of array tilt on source-range estimation in shallow water using the array invariant. *Acoustical Society of America*, 141(4), pp.2849-2856.
- [13] Byun, G.H., Kim, J.S., Cho, C.G., Song, H.C. and Byun, S.H., 2017. Array invariant-based ranging of a source of opportunity. *Acoustical Society of America*, 142(3), pp.EL286-EL291.
- [14] Byun, G.H., Cho, C.G., Song, H.C., Kim, J.S., and Byun, S.H., 2018. Array invariant-based calibration of array tilt using a source of opportunity. *Acoustical Society of America*, 143(3), pp.1318-1315.
- [15] Strang, G., Eva B., Pablo B.A., Dmitrii K. and Jane W., 2016. *Linear Algebra*. 5th Ed., Wellesley-Cambridge: Wellesley

## Appendix

### A. 최소 자승 근사(Least Squares Approximations)

방정식의 해를 구할 때 방정식의 개수가 미지수의 개수 보다 많으면 해가 존재하지 않는다. 이 때 주어진 방정식을 최대한 만족시키는 해를 찾을 때 최소 자승 근사를 사용한다.



위 그림에서 빨간색  $b$ 는  $t$ 값에 대해 주어진 해, 검은색  $p$ 는  $t$ 값에 대해 투영된 값, 파란색  $e$ 는  $t$ 값에 대한 주어진 해와 투영된 값 사이의 오차 그리고 주황색 선 ' $b = Ct + D$ '는 오차의 제곱의 합이 최소인 직선이다.

$b$ 를 지나는 직선을 ' $Ax = b$ '라 하고 이를 행렬로 나타내면 아래와 같다.

$$\begin{bmatrix} t_1 & 1 \\ t_2 & 1 \\ t_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \tag{A.1}$$

식 A.1은 방정식의 개수보다 미지수의 개수가 더 많기 때문에 최소 자승 근사를 사용한다. 최소 자승 근사를 사용하여 구한 최적의 해를  $\hat{x}$ 라 놓는다. A는 역함수가 존재하지 않기 때문에 투영행렬을 적용하면 아래의 식과 같고 결론적으로 최적의 해  $\hat{C}$ 와  $\hat{D}$ 를 구할 수 있다.

$$A\hat{x}=b \quad (A.2)$$

$$A^T A\hat{x}=A^T b \quad (A.3)$$

$$\hat{x}=(A^T A)^{-1}A^T b=\begin{bmatrix} \hat{C} \\ \hat{D} \end{bmatrix} \quad (A.4)$$

최소 자승근사에서 오차  $e$ 와 오차의 자승  $E$ 는 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$e=b-p=A x-p \quad (A.5)$$

$$E=\|A x-p\|^2 \quad (A.6)$$

최소 자승법은 오차의 자승이 최소가 되게 하는 것으로 오차의 자승을 미분한 값이 0일 때 식 A.4를 만족한다는 것과 같다.